

Chapitre 3 : Dynamique des fluides parfaits incompressibles

3.1. Introduction

La dynamique étudie les fluides en mouvement pour simplifier le problème, on néglige les frottements. Dans un liquide non visqueux ou parfait en mouvement, la pression a les mêmes propriétés que dans un liquide au repos.

On s'intéresse dans ce chapitre aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles à savoir :

L'équation de continuité (conservation de la masse)

Le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie)

3.2. Equations générales de la dynamique des fluides parfaits

Soit un cylindre élémentaire de fluide parfait qui se déplace. La démonstration se fait dans la direction des z ; pour les autres directions x et y elle se fait de façon analogue.

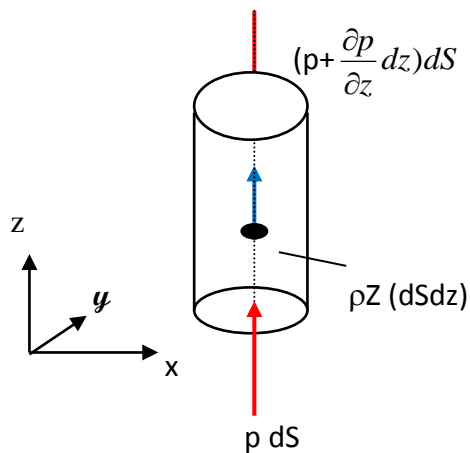


Figure (1.1) : Forces agissant sur un élément de volume $(dSdz)$ dans la direction z

$$(X, Y, Z) = (g_x, g_y, g_z)$$

Les forces qui agissent sur cet élément de volume $(dSdz)$ sont :

1. La force de volume : $\rho Z (dSdz)$
2. Les forces de pression : $p dS$ et $(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz) dS$
3. La force d'inertie (accélération) : $\rho \frac{dw}{dt} (dSdz)$

où w est la composante de la vitesse $\vec{V}(u, v, w)$ selon la direction z

Etant donné que la masse volumique reste constante, l'ensemble des forces satisfait à l'équation de Newton : $\vec{\Sigma F}_{\text{ext}} = \text{masse} \times \text{accélération}$

La condition d'équilibre des forces selon la direction des z s'écrit :

$$\cancel{p} dS - \cancel{\left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dS} + \rho Z (\cancel{dS} dz) = \rho \frac{dw}{dt} (\cancel{dS} dz)$$

ou par unité de volume : $-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z = \rho \frac{dw}{dt}$

On peut écrire de manière identique la condition d'équilibre des forces dans les autres directions, puis sous sa forme vectorielle.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{du}{dt} \\ \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{dv}{dt} \\ \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{dw}{dt} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dw}{dt} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\underbrace{\vec{\rho F}}_1 - \underbrace{\text{grad } p}_2 = \underbrace{\rho \frac{d\vec{V}}{dt}}_3} \quad (3.1)$$

1. Force de volume par volume unitaire
2. Force de pression par volume unitaire
3. Force d'inertie par volume unitaire

3.3. Écoulement permanent ou stationnaire

Un écoulement est dit permanent ou stationnaire lorsqu'en chaque point de l'espace, le vecteur vitesse \vec{V} varie indépendamment du temps.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

Dans le cas contraire, l'écoulement est dit non-permanent ou in stationnaire.

3.4. Equation de continuité

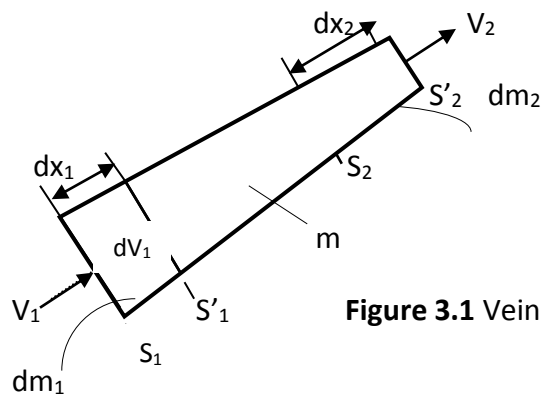


Figure 3.1 Veine de fluide parfait incompressible

Considérons une veine de fluide incompressible de masse volumique ρ animé d'un écoulement permanent (Fig.3.1). On désigne par :

S_1 et S_2 respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t
 S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t' ($t+dt$)
 V_1 et V_2 les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine
 dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt

dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1

dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2

m : masse comprise entre S_1 et S_2

dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1

dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2

A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à (dm_1+m)

A l'instant t' : le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(m+dm_2)$

La masse déplacée étant conservée, on écrit alors : $dm_1+m = m+dm_2$; soit $dm_1 = dm_2$

Alors : $\rho_1 dV_1 = \rho_2 dV_2$ ou encore : $\rho_1 S_1 dx_1 = \rho_2 S_2 dx_2$

En divisant par dt , on obtient :

$$\rho_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dx_2}{dt} \implies \rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2$$

Puisque le fluide est considéré comme incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$; on obtient l'équation de continuité suivante :

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 \quad (3.3)$$

Cette relation représente le débit volumique Q exprimé en (m^3/s). L'équation de continuité représente la loi de conservation de masse.

3.5. Notion de débit

3.5.1. Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport dm/dt quand dt tend vers zéro

$$q_m = \frac{dm}{dt}$$

Où :

q_m : masse de fluide par unité de temps traversant une section droite de la veine [kg/s]

dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt

dt : intervalle de temps en (s)

En tenant compte des équations précédentes, on obtient :

$$q_m = \rho \cdot S \cdot V$$

Ou encore :

$$q_m = \rho \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho \cdot S_2 \cdot V_2 \quad (3.4)$$

Compte tenu de la conservation de masse, on peut généraliser l'équation (3.4)

$$q_m = \rho \cdot S \cdot V \quad (3.5)$$

q_m : Débit massique (kg/s)

ρ : masse volumique (Kg/m^3)

S : section de la veine fluide (m^2)

V : vitesse moyenne du fluide à travers la section S (m/s)

3.5.2. Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport dV/dt quand dt tend vers zéro

$$q_v = \frac{dV}{dt}$$

Où :

q_v : volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite (m^3/s)

dV : volume élémentaire en (m^3) traversant une section S pendant un intervalle de temps dt

dt : intervalle de temps en secondes (s)

Relation entre le débit massique q_m et le débit volumique q_v :

$$q_v = \frac{q_m}{\rho} = \frac{\cancel{\rho} \cdot S \cdot V}{\cancel{\rho}} = S \cdot V$$

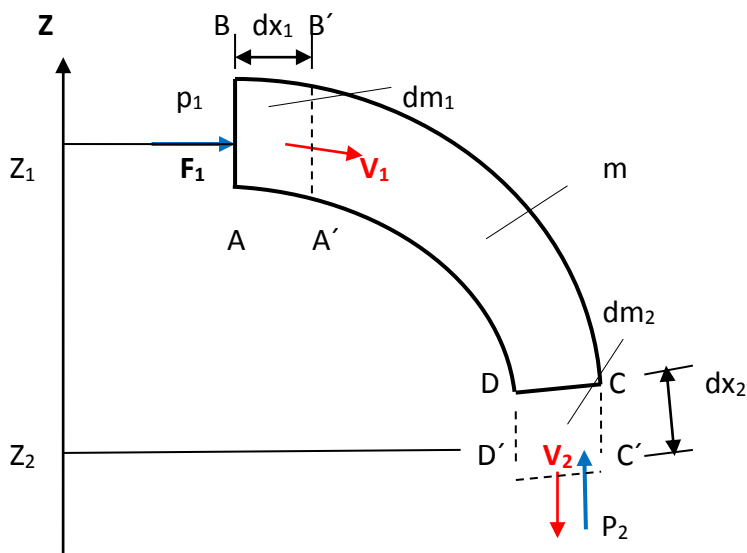
3.6. Théorème de Bernoulli (Conservation de l'énergie)

(a) Cas sans échange d'énergie

Hypothèses :

- Le fluide est parfait et incompressible
- L'écoulement est permanent
- L'écoulement est dans une conduite lisse

Application du théorème de l'énergie cinétique



La relation de Bernoulli est une équation de conservation de l'énergie mécanique du fluide au cours de son mouvement.

A l'instant t : masse fluide ABCD et à l'instant $t+dt$: masse fluide A'B'C'D'

Théorème de l'énergie cinétique

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les instants t et $t+dt$. La variation de l'énergie cinétique ΔE_c est égale à la somme des travaux des forces extérieures (poids de l'élément fluide, forces de pression).

$$\Delta E_c = \sum W \vec{F}_{\text{ext}} \longrightarrow \frac{1}{2} dm (V_2^2 - V_1^2) = dm \cdot g (z_1 - z_2) + (p_1 S_1 dx_1 - p_2 S_2 dx_2)$$

$$= dm \cdot g (z_1 - z_2) + p_1 \underbrace{S_1 dx_1}_{dV_1} - p_2 \underbrace{S_2 dx_2}_{dV_2}$$

$$\frac{1}{2} dm (V_2^2 - V_1^2) = dm \cdot g (z_1 - z_2) + (p_1 dV_1 - p_2 dV_2)$$

$$dm = \rho dV \longrightarrow dV = \frac{dm}{\rho}$$

$$\frac{1}{2} dm (V_2^2 - V_1^2) = dm \cdot g (z_1 - z_2) + (p_1 dm_1 / \rho_1 - p_2 dm_2 / \rho_2)$$

$$dm_1 = dm_2 = dm$$

$$\text{Fluide incompressible: } \rho_1 = \rho_2 = \rho$$

$$\cancel{\frac{1}{2} dm} (V_2^2 - V_1^2) = \cancel{dm} \cdot g (z_1 - z_2) + \cancel{dm} (p_1 / \rho - p_2 / \rho)$$

$$\frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) = g (z_1 - z_2) + (p_1 / \rho - p_2 / \rho)$$

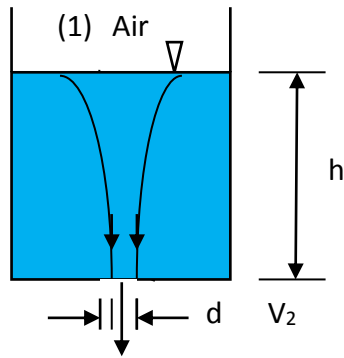
Formes de l'équation de Bernoulli

$$\begin{array}{lll} \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g z_2 & (\text{J/kg}) & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \\ p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2 & (\text{Pa}) & (3.7) \\ \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 & (\text{m}) & \end{array}$$

3.7. Applications du théorème de Bernoulli

3.7.1. Formule de Torricelli

On considère un réservoir de grandes dimensions ouvert à l'atmosphère contenant un liquide de masse volumique ρ et percé d'un petit orifice à sa base à une hauteur h de la surface libre. ($S \gg s$)



On applique le théorème de Bernoulli entre deux points (1) et (2) d'une même ligne de courant (surface libre et la sortie de l'orifice).

$$\cancel{\frac{p_1}{\rho}} + \cancel{\frac{v_1^2}{2}} + g Z_1 = \cancel{\frac{p_2}{\rho}} + \cancel{\frac{v_2^2}{2}} + g Z_2$$

Hypothèses :

- $p_1 = p_2 = p_{atm}$
- $Z_2 = 0 ; Z_1 = h$ (plan de référence en 2)
- $S \gg s \Rightarrow V_2 \gg V_1$ donc $V_1 = 0$ (négligeable)

$$V_2 = \sqrt{2gh}$$

Formule de Torricelli

(3.8)

V_2 est la vitesse théorique V_{th} , par conséquent le débit théorique du fluide recueilli à l'orifice de section S_2 , est donné par : $Q_{th} = V_{th} \cdot S_2$

$$Q_{th} = S_2 \cdot \sqrt{2gh}$$

En réalité à cause des frottements (solide/liquide), la vitesse est plus petite que la vitesse théorique. On écrit : $V_r = \varphi_1 \cdot V_{th}$

$$V_r = \varphi_1 \cdot \sqrt{2gh}$$

$$\varphi_1 = \frac{V_r}{V_{th}} \quad (3.9)$$

φ_1 : coefficient plus petit que 1 ($\varphi_1 < 1$), appelé coefficient de vitesse

La section du fluide à la sortie de l'orifice est : $S_r = \varphi_2 S_{th}$,

$$\varphi_2 = \frac{S_r}{S_{th}} \quad (3.10)$$

φ_2 : coefficient plus petit que 1 ($\varphi_2 < 1$), appelé coefficient de contraction de section.

Donc le débit réel à la sortie de l'orifice est donc :

$$Q_r = S_r \cdot V_r = \varphi_2 \cdot S_{th} \cdot \varphi_1 \cdot \sqrt{2gh} = \alpha S_{th} \cdot \sqrt{2gh} = \alpha \cdot Q_{th}$$

$$\alpha = \frac{Q_r}{Q_{th}} \quad (3.11)$$

α : coefficient plus petit que 1 ; $\alpha = \varphi_1 \cdot \varphi_2$, appelé coefficient de débit.

3.7.2. Calcul du temps de vidange

A un instant t donné, on a :

$$Q_{v_r} = -\frac{dV}{dt} = \alpha S_{th} \sqrt{2gz}$$

$$dt = -\frac{dV}{\alpha S_{th} \sqrt{2gz}} = -\frac{S(z)dz}{\alpha S_{th} \sqrt{2gz}}$$

Si le réservoir est de section constante : $S(z) = S$

$$t = -\int \frac{dV}{\alpha S_{th} \sqrt{2gz}} = -\int_0^h \frac{Sdz}{\alpha S_{th} \sqrt{2gz}}$$

D'où le temps de vidange total

$$t = \frac{2Sh}{\alpha S_{th} \sqrt{2gz}} \quad (3.12)$$

$S \cdot h$: représente le volume initial (V_0) contenu dans le réservoir

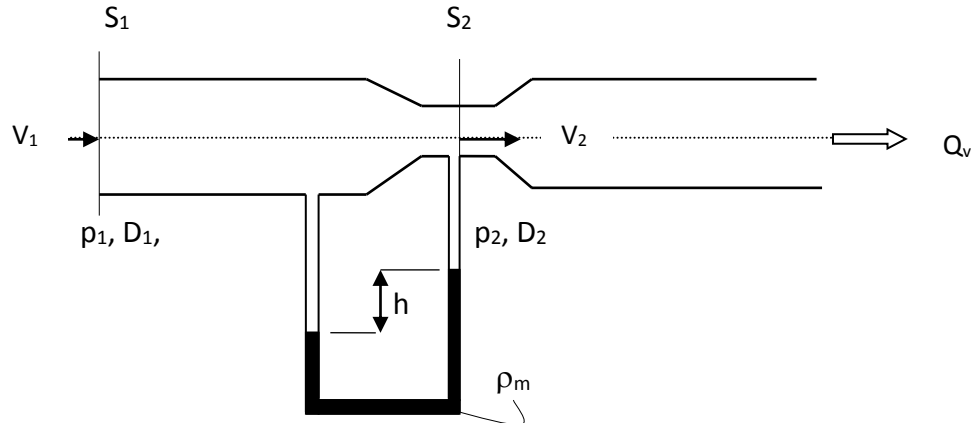
$\alpha S_{th} \sqrt{2gz}$: représente le débit en volume initial (Q_{v_0}) au débit de l'expérience, on peut mettre t sous la forme :

$$t = \frac{2V_0}{Q_{v_0}} \quad (3.13)$$

3.7.3. Tube de Venturi

Un venturi est un étranglement de conduit, limité par les sections S_1 et S_2 où les pressions sont respectivement p_1 et p_2 . Un tel appareil permet de mesurer le débit volumique d'un

fluide. La vitesse du fluide circulant dans la conduite augmente dans l'étranglement et sa pression diminue. $V_2 > V_1$ $p_2 < p_1$



On appliquant le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre les deux points (1) et (2), on obtient :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Ici $z_1 = z_2$ (écoulement horizontal) et l'équation de continuité permet d'écrire :

$$Q_v = S_1 V_1 = S_2 V_2 \iff V_2 = S_1 \frac{V_1}{S_2}$$

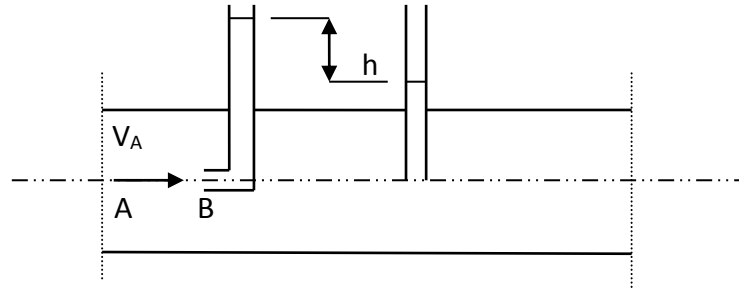
$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g} \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] = \frac{V_1^2}{2g} \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right]$$

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{V_1^2}{2} \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right] \quad (3.14)$$

S_1 et S_2 sont connues (caractéristiques du venturi), p_1 et p_2 sont données par les hauteurs du liquide manométrique dans le manomètre, on détermine donc la vitesse V_1 .

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right]}} \quad (3.15)$$

3.7.4 Tube de Pitot



Le tube de Pitot sert à mesurer la vitesse locale d'un fluide en le reliant à la différence de pression d'un manomètre à liquide. On considère un écoulement et on plonge un tube de Pitot de telle sorte qu'il soit parallèle aux lignes de courant. A son embouchure, le fluide peut pénétrer. Une fois qu'il a occupé tout l'espace disponible au sein du tube, il n'y a plus de fluide qui entre et la vitesse au point B, embouchure du tube, est donc nulle. On l'appelle un point d'arrêt de la ligne de courant.

Considérons une ligne de courant A-B.

En A, on a $p = p_A$ (par exemple une pression hydrostatique), $V = V_A = V_\infty$, et $z = z_A$

En B, on a $p = p_B$, $V_B = 0$, et $z = z_A = z_B$

Le théorème de Bernoulli donne donc : $p_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 + \cancel{\rho g z_A} = p_B + \frac{1}{2} \rho V_B^2 + \cancel{\rho g z_B}$ =0 -

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_B - p_A)} \quad (3.16)$$

Comme la différence de pression ($p_B - p_A$) peut être déterminée si on utilise un manomètre (tube en U), on peut déduire la vitesse V_∞

De l'hydrostatique, on a : $(p_B - p_A) = \rho g h$, ce qui donne :

$$V_\infty = \sqrt{2gh}$$

3.8. Théorème de Bernoulli (Conservation de l'énergie)

(b) Cas avec échange d'énergie

Chapitre 4 : Dynamique des fluides réels incompressibles

4.1. Écoulement laminaire et turbulent

La science de la turbulence a commencé vers la fin du XIX^e siècle quand l'anglais Osborne Reynolds a pu observer la transition du régime laminaire au régime turbulent. Dans un tuyau, si l'eau passe lentement, on aura des filets bien réguliers c'est-à-dire un écoulement laminaire. Si cette eau va trop vite, il apparaît un très grand nombre de tourbillons et les pertes de charges dans le tuyau vont être très différentes.

4.1.1. Régimes d'écoulement

Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en dimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit de la manière suivante :

$$\mathbf{Re} = \frac{V.D.\rho}{\mu} = \frac{V.D}{\nu} \quad (4.1)$$

Avec :

D : Diamètre intérieur de la conduite en (m)

V : Vitesse moyenne d'écoulement en (m/s)

ρ : Masse volumique du fluide en (kg/m³)

μ : Viscosité dynamique en (Pa.s)

ν : Viscosité cinématique en (m²/s)

En fonction des nombres de Reynolds croissants, on distingue quatre régimes principaux : régime de Stokes, régime laminaire, régime transitoire, régime turbulent.

L'écoulement de Stokes correspond aux très faibles valeurs du Reynolds (inférieures à 1). Dans ce cas les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables, les forces visqueuses et les forces de pression s'équilibrent. Cette notion correspond au domaine de la micro fluidique. Pour des valeurs plus élevées, les forces d'inertie entrent en jeu : c'est le domaine de la dynamique des fluides.

On observe d'abord un écoulement laminaire avec des lignes de courant bien identifiées. Dans ce type d'écoulement l'effet de la viscosité s'atténue au fur et à mesure que l'on s'éloigne des parois, les vitesses du fluide tendant à s'homogénéiser. Il est alors souvent commode de considérer que l'approximation du fluide parfait (non visqueux) est suffisante hors d'une zone proche d'une paroi, appelée couche limite.

À partir d'un certain Reynolds se produit une transition qui fait apparaître des instabilités dues à l'amplification des perturbations. La valeur du Reynolds de transition et la nature des instabilités dépendent essentiellement du type d'écoulement considéré.

Ensuite, les instabilités augmentent au point de donner naissance à un phénomène chaotique dans lequel il est difficile de voir une organisation : c'est la turbulence

Soit un courant d'eau qui circule dans une conduite à section circulaire. On introduit un filet de colorant dans l'axe de cette conduite. Suivant la vitesse d'écoulement de l'eau, on peut observer les phénomènes suivants :

- a) Régime laminaire** : le fluide s'écoule en couches cylindriques coaxiales ayant pour axe le centre de la conduite.
- b) Régime transitoire** : c'est une transition entre le régime laminaire et le régime turbulent.
- c) Régime turbulent** : Formation de mouvement tourbillonnant dans le fluide. Cette expérience est faite par Reynolds en faisant varier le diamètre de la conduite, la température, le débit, etc... pour divers fluides.

- Si $Re < 2000$, le régime est Laminaire.
- Si $Re > 3000$, le régime est turbulent.
- Si $2000 < Re < 3000$, le régime est transitoire.

4.1.2. Signification physique du nombre de Reynolds «Re »

Le fluide est globalement soumis à 2 forces :

- Celle que subirait le fluide s'il était parfait :

$$F_{\text{inertie}} = m \cdot a = \rho V \cdot \frac{dv}{dt} \quad (4.2)$$

- Celle qui résulte des frottements

$$F_{\text{frot}} = \mu \cdot S \cdot \frac{dv}{dx} \quad (4.3)$$

- Le rapport de ces deux forces $\frac{F_{\text{inertie}}}{F_{\text{frot}}} = \text{Re}$ (4.4)

Ainsi, si Re est très grand, il y a prédominance des forces d'inertie, par contre, aux faibles valeurs, c'est la force de frottement qui domine

La distribution des vitesses est une « parabole aplatie » :

$$0,75 \leq v_{\text{moy}} \leq 0,85 \cdot v_{\text{max}}$$

Les particules circulent dans toutes les directions (=aléatoire).

La variation de quantité de mouvement est prépondérante.

Au voisinage de la paroi, l'écoulement est laminaire : couche limite.

Le régime turbulent est le plus fréquemment rencontré : il est permanent en moyenne.

4.1.3. Théorème de BERNOULLI pour fluides réels

Lorsque le fluide est réel, la viscosité est non nulle, alors au cours du déplacement du fluide, les différentes couches frottent les unes contre les autres et contre la paroi qui n'est pas parfaitement lisse d'où il y a une perte sous forme de dégagement d'énergie ; cette perte appelée « perte de charge ».

La relation de Bernoulli peut s'écrire sous la forme :

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + \Delta H_{1,2} \quad (4.5)$$

$\Delta H_{1,2}$: C'est l'ensemble des pertes de charge entre (1) et (2) exprimée en hauteur.

Les pertes de charge peuvent être exprimées en pression :

$$\Delta p_{1,2} = \rho \cdot g \cdot \Delta H_{1,2} \quad (4.6)$$

4.1.4. Ecoulement de Poiseuille

Nous adoptons les hypothèses simplificatrices suivantes :

Fluide incompressible

Ecoulement laminaire

Symétrie de révolution autour de l'axe $r = 0$

Ecoulement permanent

Ecoulement induit par gradient de pression constant ΔP établi entre l'entrée et la sortie de la conduite de longueur L .

4. 1.5. Répartition des vitesses à l'intérieur d'une conduite

Soit l'axe (ox) confondu avec l'axe d'une conduite de diamètre $D=2r_0$, (oy) et (oz) sont quelconques perpendiculaire à (ox). Figure (4.5)

L'écoulement étant laminaire, les lignes de courant sont, par raison de symétrie parallèle à (ox). Les composantes v et w de la vitesse sont nulles : $v = w = 0$; ainsi l'écoulement étant aussi stationnaire.

Par suite la répartition de la vitesse à l'intérieur du cylindre est donnée par l'expression suivante :

$$u(r) = \frac{a}{4\mu} (R^2 - r^2)$$

En posant $r = 0$ on trouve

$$u = \frac{aR^2}{4\mu} = u_{\max} \quad (4.7)$$

Expression qui représente un paraboloïde de révolution ayant son sommet sur l'axe De la conduite. Figure (4.6).

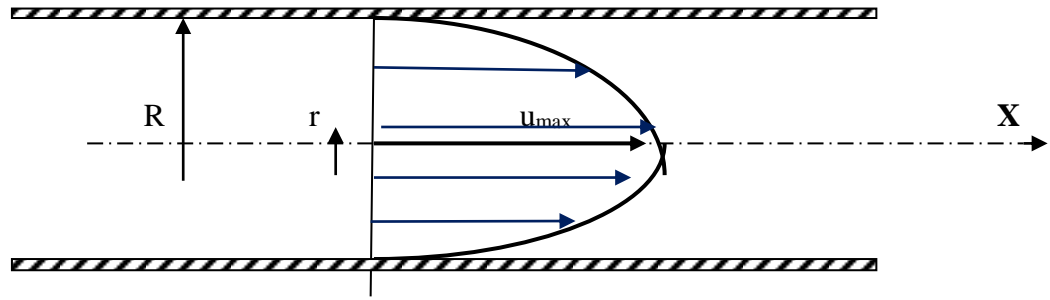


Figure (4.5) : Répartition des vitesses dans la conduite.

De même on peut déterminer la répartition des pressions le long du tube :

On a
$$\frac{dP_m}{dx} = -a \quad (4.8)$$

Soit :
$$p^*(x) = -ax + p_0^*$$

p_0^* : Étant une constante d'intégration.

La pression motrice décroît donc linéairement le long du tube, tout en restant constante dans une même section droite.

On peut écrire : $p_1^* - p_2^* = aL$

L : La distance entre les deux points 1 et 2 sur lesquels s'exerce la pression

$\Delta p_m = p_{m1} - p_{m2}$ est la différence de pression motrice entre l'entrée et la sortie.

Ou encore :
$$a = \frac{\Delta P_m}{L} \quad (4.9)$$

4.1.6. Calcul du débit volumique:

Le débit du fluide est donné par l'intégrale (débit en volume)

$$q_v = \int_0^R 2\pi r u(r) dr = \frac{2\pi a}{4\mu} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi a R^4}{8\mu} = \frac{\pi a D^4}{128\mu}$$

En remplaçant a par sa valeur $a = \frac{\Delta p_m}{L}$, il vient :

$$q_v = \frac{\pi R^4}{8\mu L} \Delta P_m = \frac{\pi D^4}{128\mu L} \Delta P_m \quad (4.10)$$

Cette dernière formule traduit la loi de Hagen Poiseuille : le débit est proportionnel à la différence des pressions motrices appliquées aux extrémités du tube, et à la puissance 4 de son diamètre.

4.1.7. Vitesse débitante (vitesse moyenne):

La vitesse débitante est par définition la vitesse moyenne calculée sur la section droite,

c'est donc :
$$u_{moy} = \frac{q_v}{S} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{\pi a R^4}{8\mu}$$

Soit :
$$\boxed{u_{moy} = \frac{aR^2}{8\mu} = \frac{u_{max}}{2}}$$
 (4.11)

La vitesse maximale de l'écoulement laminaire dans un tube circulaire est exactement le double de la vitesse débitante.

4.1.9. Coefficient de perte de charge

Dans le cas de l'écoulement permanent d'un fluide dans une conduite cylindrique la perte de pression motrice est proportionnelle à la longueur de la conduite considérée. Il est donc naturel d'introduire un coefficient de perte de pression linéique tel que λ .

Des considérations dimensionnelles amènent à écrire la différence de pression traduisant la perte de charge dans une conduite cylindrique sous la forme générale :

$$\Delta P_m / L = \lambda \frac{1}{D} \rho \frac{u_m^2}{2} \quad (4.12)$$

λ : est un coefficient sans dimension, appelé coefficient de perte de charge linéaire.

4.1.10. Pertes de charge

Elles dépendent de :

- La viscosité du fluide.
- La nature de l'écoulement.
- La géométrie de la conduite.

Les pertes de charge sont à l'origine :

➤ Des frottements entre les différentes couches de liquide et des frottements entre le liquide et la paroi interne de la conduite le long de l'écoulement : ce sont les pertes de charge régulières (linéaires)

➤ De la résistance à l'écoulement provoqués par les accidents de parcours (vannes, coudes, etc...) ; ce sont les pertes de charge singulières ou locales.

➤

a). Pertes de charge régulières :

Soit un écoulement permanent d'un liquide dans une conduite de diamètre D. La perte de charge entre deux points séparés d'une longueur L est de la forme :

$$\Delta H_r = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (4.13)$$

Avec :

V : vitesse moyenne du fluide (m/s)

λ : Coefficient de perte de charge régulière.

L : longueur totale de la conduite (m)

D ; Diamètre intérieur de la conduite (m)

Pour déterminer le coefficient de perte de charge régulière **λ**, on fait souvent appel à des formules empiriques tel que :

Si l'écoulement est laminaire, on applique la loi de Poiseuille : $\lambda = \frac{64}{Re}$

✓ Si l'écoulement est turbulent, on a deux cas :

1. Turbulent lisse : $Re < 10^5$, on applique la loi de Blasius : $\lambda = 0,316 \cdot Re^{-1/4}$

2. Turbulent rugueux : $Re > 10^5$, on a la loi de Blench : $\lambda = 0.79 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$

ε : hauteur moyenne des aspérités (mm). En pratique pour les tubes en acier soudé :
 $\varepsilon \in [0.15; 0.20]$

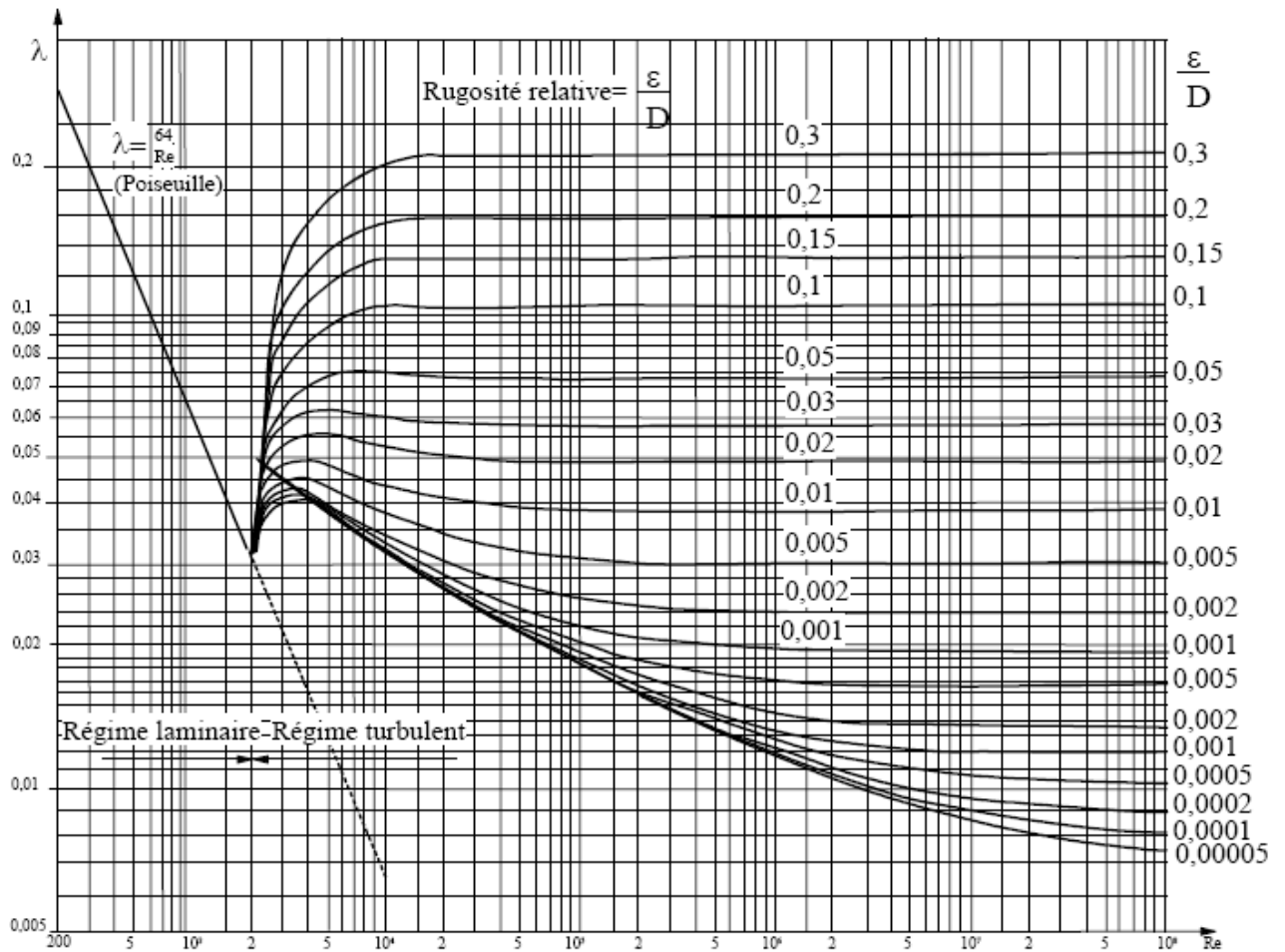


Figure (4.7) : Diagramme de *Moody*

b. Pertes de charge singulières :

Les pertes de charge singulières sont essentiellement dues aux accidents de canalisation c'est à dire toute modification d'un trajet rectiligne.

Dans tous les cas ci-après, il résulte du passage du liquide au point singulier une perte

de charge donnée par la formule :

$$\Delta H_s = \sum K_i \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (4.14)$$

$\sum K_i$: Coefficients sans dimension dépendant de la nature du point singulier dont il s'agit.